

## Kognitivne i neuronske osnove razumijevanja prirodnih brojeva

Mia Šetić

Odjel za psihologiju, Hrvatsko katoličko sveučilište, Zagreb

---

### Sažetak

U radu su prikazane suvremene spoznaje o kognitivnim i neuronskim sustavima koji se nalaze u podlozi razumijevanja prirodnih brojeva. Prvi sustav, karakterističan samo za ljude, omogućuje razumijevanje egzaktnih brojeva i njihovu fleksibilnu primjenu kod kardinalnoga, ordinalnoga i nominalnoga označavanja. Kronometrijskim je istraživanjima otkriveno nekoliko pojava, kao što su efekt veličine, efekt udaljenosti i SNARC efekt, koji upućuju na to da se značenje egzaktnog broja oslanja na evolucijski stariji sustav za približnu procjenu brojnosti. Ovaj je sustav prisutan kod predverbalne djece i drugih vrsta, a brojnost reprezentira pomoću mentalne numeričke linije. Treći sustav osigurava automatsko i točno prebrojavanje malih skupova. Ovaj je sustav povezan s pažnjom i radnim pamćenjem odnosno indeksiranjem ili individualizacijom objekata i također je prisutan kod predverbalne djece i drugih vrsta. Neuroznanstvena istraživanja pokazuju da postoje odvojeni neuronski krugovi za reprezentaciju egzaktnih brojeva, približne brojnosti i malih skupova. Na kraju, opisana su istraživanja o mogućim interakcijama među sustavima jer idalje ostaje neriješeno pitanje u kojoj mjeri razumijevanje pojma egzaktnog broja ovisi o sustavu za procjenu brojnosti i sustavu za brzo prebrojavanje.

**Ključne riječi:** brojevi, mentalna numerička linija, osjet za brojeve, subitizacija

---

### Uvod

U suvremenom tehnološki razvijenom društvu kompetentno baratanje brojevima od izuzetne je važnosti za uspješnu prilagodbu pojedinca. Istraživanja pokazuju da su osnovnoškolske matematičke vještine bolji prediktor kasnijega akademskog postignuća od vještine čitanja ili socio-emocionalnih vještina (Duncan i sur., 2007). Nadalje, niska je razina matematičkih sposobnosti povezana s nižim

---

✉ Mia Šetić, Odjel za psihologiju, Hrvatsko katoličko sveučilište, Ilica 242, 10000 Zagreb.  
E-pošta: [mia.setic@unicath.hr](mailto:mia.setic@unicath.hr)

Rad je nastao uz potporu projekta *Metacognition in Category Learning, Thinking and Comprehension* (šifra: 4139), koji financira Hrvatska zaklada za znanost, i projekta *Kognitivni i neurodinamički aspekti percepcije, učenja i mišljenja* (šifra: 13.04.1.3.11), koji financira Sveučilište u Rijeci.

indeksima životnog uspjeha (Parsons i Brynner, 2005). Na razini je društva napredak u matematičkoj kompetenciji povezan s porastom bruto društvenog dohotka (Organizacija za ekonomsku kooperaciju i razvoj, 2010, str. 17) i porastom globalne ekonomske kompetitivnosti. Navedeni podaci upućuju na potrebu temeljitog istraživanja kognitivnih i neuronskih osnova elementarnih numeričkih sposobnosti, kao što su uspoređivanje brojeva po veličini, procjena brojnosti skupa ili mentalna aritmetika s jednoznamenkastim brojevima, jer one predstavljaju temelj na kojem se grade složenije matematičke vještine i znanje.

Istraživanja elementarnih numeričkih sposobnosti upućuju na postojanje tri odvojena sustava za reprezentaciju i razumijevanje brojeva (Feigenson, Dehaene i Spelke, 2004; Gallistel i Gelman, 2005; Nieder i Dehaene, 2009; Piazza, 2010):

1. Sustav za egzaktne brojeve
2. Sustav za percepciju ili procjenu brojnosti (približne brojeve)
3. Sustav za automatsko prebrojavanje (subitizaciju).

Svaki je od ovih sustava detaljno proučavan kognitivnim i neuroznanstvenim metodama. Cilj je ovog preglednog rada opisati najvažnije spoznaje o funkcioniranju tih sustava i načinu kako oni pridonose razumijevanju brojeva. Pri tome, važno je napomenuti da se ovdje ne radi o proučavanju kognitivnih osnova same matematike, već o mnogo elementarnijim kognitivnim sposobnostima koje služe kao prekursor za usvajanje matematičkog znanja.

### **Sustav za egzaktne brojeve**

Ključno je obilježje baratanja brojevima njegova fleksibilnost s obzirom na to da se brojevima koristimo u različitim kontekstima. Wiese (2003a, 2003b) je identificirao tri načina na koji se brojevi primjenjuju za označavanje objekata: kardinalno, ordinalno i nominalno označavanje. Kod kardinalnog označavanja broj služi za određivanje kardinaliteta, odnosno veličine skupa objekata ("tri knjige"). Dakle, odgovara na pitanje koliko čega ima. Kardinalno označavanje možemo povezati i s određenom mjernom jedinicom kao kod "tri metra" ili "tri sekunde" kako bismo odredili količinu. Kod ordinalnog se označavanja koristimo brojem kako bismo odredili položaj jednog objekta unutar nekog uređenog niza ili rang poretka objekata ("treći razred", "naš atletičar stigao je na cilj treći"). Kod nominalnog označavanja broj koristimo kao arbitrarni simbol koji nam služi za identificiranje pojedinog objekta ("autobus broj tri"). Drugim riječima, broj nam služi za imenovanje objekta iako smo ga mogli nazvati i nekako drugačije (npr. "autobus Ivan", "autobus Marija").

Kod kardinalnog se označavanja uspostavlja obostrano jednoznačno preslikavanje (bijekcija) između skupa brojeva i skupa objekata. Preslikavanje se ostvaruje procesom prebrojavanja. Svakom objektu u skupu dodjeljujemo jedan

jedinstveni broj pri čemu brojevi moraju činiti uređeni niz. Dakle, uvijek moramo prebrojavati istim redosljedom 1, 2, 3 itd. i moramo paziti da ne prebrojimo isti objekt dvaput. Na kraju prebrojavanja kardinalitet skupa odgovara broju koji smo dodijelili zadnjem objektu u skupu (Wiese, 2003b). Na taj način utvrđujemo egzaktnu jednakost između broja i veličine skupa. Egzaktna je jednakost preduvjet za razumijevanje pojma egzaktnog broja kao oznake za sve skupove s istom veličinom (kardinalitetom). U tom smislu govorimo o egzaktnim brojevima ("na polici je dvanaest knjiga"), za razliku od aproksimacija, odnosno procjena veličine skupa ("na polici je desetak knjiga"). Kod ordinalnog označavanja koristimo drugo svojstvo prebrojavanja, a to je stvaranje redosljeda ili poretka. U ovom slučaju, svaki novi broj u nizu nastaje tako da se prethodnik uveća za jedan, a ova je operacija nazvana funkcija nasljednik. Dakle, broj dva je nasljednik broja jedan, broj tri nasljednik je broja dva itd. Ordinalno označavanje nastaje rekurzivnom primjenom funkcije nasljednik. Zanimljivo je da su i egzaktna jednakost i funkcija nasljednik korištene kao polazna osnova za formalno-matematičku definiciju prirodnog broja (Izard, Pica, Spelke i Dehaene, 2008).

### *Usporedba brojeva po veličini*

Temeljno obilježje egzaktnih brojeva jest da su to diskretni simboli koji označavaju jasno odvojene veličine odnosno kardinalitete skupova. Zbog toga, usporedba brojeva po veličini ne bi trebala predstavljati problem za odrasle ispitanike jer se svaki broj referira na precizno određenu numeričku veličinu, koju je lako razlikovati od ostalih. Međutim, istraživanja s mjerenjem vremena reakcije i točnosti prilikom usporedbe dva broja po veličini otkrila su dva zanimljiva efekta koja se kose s ovom intuicijom (Moyer i Landauer, 1967; Parkman, 1971):

1. *Efekt numeričke udaljenosti* je pojava da se vrijeme reakcije i broj grešaka smanjuju u funkciji numeričke udaljenosti između brojeva koji se uspoređuju. Na primjer, ispitanici će brže i točnije odgovarati kada uspoređuju po veličini 3 i 8, nego kada uspoređuju 3 i 4.
2. *Efekt numeričke veličine* je pojava da se, za istu numeričku udaljenost, vrijeme reakcije i broj grešaka povećava u funkciji veličine brojeva. Na primjer, ispitanici će brže usporediti brojeve 3 i 5, nego 7 i 9, iako je numerička udaljenost između ovih parova brojeva identična.

Ovi efekti upućuju na zaključak da egzaktna jednakost i funkcija nasljednik nisu dovoljne za razumijevanje kognitivnih mehanizama koji se nalaze u podlozi razumijevanja značenja brojeva. Umjesto toga, čini se da se mentalna reprezentacija egzaktnog broja oslanja na analognu, odnosno kontinuiranu veličinu te da položaj na internalnom kontinuumu predstavlja osnovu za reprezentaciju njegova značenja (Restle, 1970). Međutim, postavlja se pitanje kakva je točno priroda analogne reprezentacije na koju se egzaktni brojevi preslikavaju, odnosno kakvi neuralni mehanizmi mogu biti u podlozi ovakve reprezentacije. Dehaene i Changeux (1993)

su predložili hipotezu da se brojevi preslikavaju na reprezentaciju prostora tvoreći mentalnu numeričku liniju na kojoj su brojevi poredani slijeva nadesno ovisno o njihovoj numeričkoj veličini.

### *SNARC efekt i mentalna numerička linija*

Dehaene, Bossini i Giraux (1993) otkrili su da u zadatku određivanja pariteta broja ispitanici brže reagiraju lijevom rukom kada im je prezentiran numerički mali broj (1 ili 2). S druge strane, ispitanici reagiraju brže desnom rukom kada je prezentiran numerički veći broj (8 ili 9). Ova je pojava nazvana SNARC efekt (engl. *spatial-numerical association of response codes*). SNARC efekt se javlja usprkos tome što sam zadatak određivanja pariteta nema nikakve veze s procjenom veličine broja jer i parni i neparni brojevi mogu biti numerički mali i veliki. Zanimljivo je da dominantnost ruke ispitanika nije imala utjecaja na pojavu efekta kao ni to jesu li su ispitanici prekrížili ruke prilikom odgovaranja, što upućuje na zaključak da ovaj efekt ovisi o alocentričnom koordinatnom sustavu koji ishodište ima izvan nas, a ne o egocentričnom sustavu koji ima koordinate postavljene relativno s obzirom na ruke. Međutim, efekt je bio mnogo slabiji kod osoba koje čitaju zdesna nalijevo. Na osnovu dobivenih rezultata, Dehaene i sur. (1993) su zaključili da brojeve mentalno povežemo s prostorom tako da ih poredamo po numeričkoj veličini uzduž dimenzije lijevo-desno, pri čemu su mali brojevi smješteni lijevo, a veći brojevi desno. Na taj način nastaje mentalna numerička linija koja se automatski aktivira uvijek kada percipiramo brojeve i koja nam omogućuje dohvaćanje značenja broja, odnosno njegovu numeričku veličinu (kardinalitet), čak i onda kada je to irelevantno za zadatak.

Zanimljivo je da uz pretpostavku da je mentalna numerička linija logaritamska, a ne linearna možemo objasniti postojanje efekta numeričke veličine i udaljenosti. Logaritamska reprezentacija znači da je prostorni razmak između malih brojeva veći nego razmak između velikih brojeva, odnosno mentalna je numerička linija zgusnutija na desnoj nego na lijevoj strani, te će ljudima biti teže razlikovati numerički veće brojeve od manjih. Iz ove činjenice proizlazi da razlikovanje brojeva slijedi Weberov zakon, koji vrijedi za sve osjetne modalitete (Dehaene, 2003). Prema Weberovu je zakonu promjena u intenzitetu podražaja koja je potrebna da se izazove razlika u osjetu (diferencijalni limen) proporcionalna intenzitetu referentnog podražaja. Na primjer, ako pretpostavimo da je Weberova konstanta za brojeve jednaka 2, to znači da će ljudi numeričku udaljenost između brojeva 1 i 2 doživljavati subjektivno jednako veliku kao i udaljenost između brojeva 2 i 4 ili 4 i 8 ili 8 i 16 jer svi navedeni parovi imaju isti omjer. Na taj način nastaju efekt numeričke veličine i udaljenosti.

### *Brojevi i prostor*

Zanimljivo je pitanje postoje li, osim SNARC efekta, i drugi nalazi o povezanosti brojeva i prostora. Budući da je reprezentacija prostora usko povezana s usmjeravanjem pažnje u vidnom polju, Fischer, Castel, Dodd i Pratt (2003) su ispitali mogu li brojevi utjecati na usmjeravanje pažnje. Kada se na sredini ekrana na mjestu fiksacijske točke prikaže broj, dolazi do automatskog usmjeravanja pažnje lijevo ili desno od fiksacijske točke ovisno o numeričkoj veličini broja. Drugim riječima, mali brojevi usmjeravaju pažnju u lijevi dio vidnog polja, dok veliki brojevi usmjeravaju pažnju u desno. Nadalje, pristranosti kod usmjeravanja pažnje mogu se detektirati i u zadatku određivanja sredine linije (bisekcija linije). Ispitanici su vrlo točni u bisekciji ako se linija sastoji od slova:

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

S druge strane, ako se linija sastoji od riječi za brojeve, kao što je:

devetdevetdevetdevetdevet

ili

dvadvadvadvadvadvadva,

ispitanici će pokazati sistematsku pristranost kod lociranja sredine linije (Calabria i Rossetti, 2005; Fischer, 2001). Naime, ako se linija sastoji od riječi "devet", ispitanici će locirati njezinu sredinu desnije od njezina stvarnog položaja, dok će kod linije koja se sastoji od riječi "dva" locirati sredinu više ulijevo od njezina stvarnog položaja. Nadalje, položaj broja u vidnom polju utječe i na izvedbu u zadatku usporedbe brojeva u kojem se tipično javlja efekt numeričke udaljenosti. Kod brojeva koji su manji od standarda ispitanici brže odgovaraju kada se broj prezentira u lijevo nego u desno vidno polje. S druge strane, za brojeve veće od standarda ispitanici reagiraju brže kada je broj prezentiran u desno vidno polje u odnosu na lijevo (Dehaene, Dupoux i Mehler, 1990).

Dodatni argument za povezanost brojeva s prostorom daju neuropsihologijske studije pacijenata s jednostranim zanemarivanjem (engl. *hemi-spatial neglect*). Nakon ozljede desnog parijetalnog režnja pacijenti pokazuju zanemarivanje podražaja koji su prezentirani na kontralateralnoj (lijevoj) strani prostora. Kod ozljede lijevog parijetalnog režnja ne dolazi do sličnog poremećaja. Na testu bisekcije linije pacijenti s jednostranim zanemarivanjem obično pokazuju pristranost ka desnoj strani, odnosno ignoriraju lijevi dio linije. U dvije studije, koje su proveli Zorzi, Prifits i Umiltà (2002) te Vuilleumier, Ortigue i Brugger (2004), od pacijenata je s jednostranim zanemarivanjem traženo da odrede broj koji se nalazi na sredini različitih numeričkih intervala. Na primjer, trebali su odrediti broj koji se nalazi na sredini intervala između 3 i 12. Zanimljivo je da su njihovi odgovori sistematski odstupali prema brojevima koji su veći od točnog odgovora. Drugim riječima, čini se kao da su zanemarili lijevi dio mentalne numeričke linije na isti način kako

zanemaruju lijevi dio prostora iako sam zadatak nije uključivo nikakvu prostornu komponentu odnosno pacijenti su dobivali zadatke i davali odgovor verbalno. Zanimljivo je da kod vrlo malih linija, kao i kod malih numeričkih intervala, dolazi do efekta križanja odnosno promjene smjera pristranosti. Drugim riječima, pacijenti pokazuju sklonost bisekcije linije ulijevo od stvarne sredine, kao i odabira broja koji je manji od točnog odgovora.

### Sustav za percepciju brojnosti (Osjet za brojeve)

Iako se matematička znanja stječu formalnim obrazovanjem u školi učenjem apstraktnih pravila, mnogobrojna istraživanja pokazuju kako neke elementarne numeričke sposobnosti nije potrebno učiti, već su prisutne i spremne za upotrebu od rođenja, i to ne samo kod čovjeka već i kod mnogih životinjskih vrsta. Analizirajući je numeričke sposobnosti životinja kao i ljudske intuicije o brojevima Tobias Dantzig (1967) formulirao ideju o osjetu za brojeve (engl. *number sense*) kao zasebnom sustavu za približnu procjenu brojnosti. Ovaj sustav ne ovisi o jeziku i omogućuje nam da uočimo da se nešto promijenilo kada se nekom skupu objekata doda ili oduzme jedan ili više elemenata. Ideju je dalje razradio Dehaene (2001, 2011) i potkrijepio ju je s brojnim istraživanjima. Sustav za procjenu brojnosti daje nam samo približnu informaciju o tome koliko elemenata ima u skupu, ali ne može odrediti precizno kardinalitet skupa.

#### *Osjet za brojeve kod životinja*

Životinje su sposobne za uspoređivanje brojeva po veličini kao i za jednostavnu aritmetiku. Na primjer, Rumbaugh, Savage-Rumbaugh i Hegel (1987) su kreirali situaciju u kojoj čimpanza mora birati između dvije ploče na kojima se nalaze komadići čokolade. Na jednoj se ploči nalaze dvije hrpice čokolade pri čemu jedna hrpica ima 4 komadića, a druga 3 komadića čokolade. Na drugoj se ploči također nalaze dvije hrpice čokolade, ali na jednoj hrpi je 5 komadića, a na drugoj je samo jedan komadić čokolade. Istraživanje je pokazalo da kada se čimpanzi da dovoljno vremena da prouči cijelu situaciju, ona će uvijek birati onu ploču koja sadrži ukupno više komadića čokolade. Drugim riječima, čimpanza će izračunati da na jednoj ploči ukupno ima  $3 + 4 = 7$  komadića dok na drugoj ploči ima  $5 + 1 = 6$  komadića i nakon toga odrediti da je 7 veće od 6 te da će tim izborom dobiti više čokolade. Pri tome su čimpanze povremeno radile greške. Kada je numerička udaljenost brojeva koje treba usporediti velika kao npr. usporedba 2 i 6, broj grešaka je bio mali. Međutim, kada je trebalo usporediti numerički bliske brojeve, broj grešaka je bio mnogo veći. Također, broj grešaka rastao je u funkciji numeričke veličine u skladu s Weberovim zakonom o razlikovanju veličina. Drugim riječima, i kod približnih procjena brojnosti kod životinja javljaju se isti efekti numeričke udaljenosti i numeričke veličine kao i kod egzaktnih usporedbi brojeva kod ljudi. Ovi se efekti javljaju i kod

drugih vrsta, kao što su miševi, golubi, delfini, a javljaju se i u drugim numeričkim zadacima, iz čega proizlazi da se radi o općim zakonitostima koja upravljaju našim predodžbama o brojevima i koja nam pružaju uvid u moguće mehanizme reprezentacije brojeva (Dehaene, 2011).

### *Osjet za brojeve kod predverbalne djece*

Procjena brojnosti kod djece ispituje se različitim varijantama tehnike habituacije. Osnovna je ideja da se dijete izloži podražaju (skupu točkica) određene brojnosti na koji se dijete navikne (habituirao). Nakon toga se djetetu prikaže novi podražaj s drugačijom brojnošću. Ako dijete pokaže interes za novi podražaj, možemo zaključiti da je dijete uočilo razliku između dva podražaja, odnosno da može razlikovati dva broja (Goswami, 2008). Cooper (1984) je koristeći habituaciju pokazao da dojenčad starosti 14 mjeseci može razlikovati relacije "veće od" i "manje od", dok dojenčad starosti 10 mjeseci može samo razlikovati relacije "jednako" od "nije jednako".

Xu i Spelke (2000) su pokazale da djeca od 6 mjeseci starosti mogu razlikovati 8 od 16, ali ne mogu razlikovati 8 od 12 objekata kada su im prezentirani u vidnom polju. Također, mogu razlikovati 4 od 8 objekata, ali ne mogu razlikovati 2 od 4 objekta (Xu, 2003). Iz ovih istraživanja proizlazi da su djeca sposobna razlikovati brojeve kada je omjer brojnosti 1:2, a ne mogu razlikovati manje omjere kao što je 3:4, što je sukladno Weberovu zakonu. Iznimka od ovog pravila je nemogućnost razlikovanja brojnost 2 i 4, a Xu, Spelke i Goddard (2005) su pokazale da djeca ne mogu razlikovati 1 od 2 objekta, dok je, s druge strane, razlikovanje između 16 i 32 objekata moguće iako se u oba slučaja radi o istom omjeru 1:2. Odstupanje se od Weberova zakona pripisuje djelovanju zasebnog sustava za male egzaktne brojeve, koji je opisan u sljedećem poglavlju. Drugim riječima, djeca koriste osjet za brojeve, odnosno analognu reprezentaciju veličina kada percipiraju veću brojnost, dok za manju brojnost imaju na raspolaganju sustav za subitizaciju (Goswami, 2008). Istraživanja su pokazala da i starija djeca rabe analognu reprezentaciju veličina kada procjenjuju brojnost objekata u vidnom polju (Huntley-Fenner, 2001; Huntley-Fenner i Cannon, 2000).

### *Neuronske osnove osjeta za brojeve*

Neuronski krugovi vezani uz reprezentaciju brojnosti smješteni su u parijetalnom režnju (Dehaene, Molko, Cohen i Wilson, 2004). Analizirajući rezultate brojnih studija koje su koristile tehniku funkcionalnog oslikavanja mozga Dehaene, Piazza, Pinel i Cohen (2003) identificirali su horizontalni segment intraparijetalnog sulka (HIPS) kao strukturu koja se aktivira u svim zadacima u kojima se manipulira brojevima kao što su mentalna aritmetika, usporedba brojeva po veličini, određivanje pariteta i slično. Pri tome, aktivacija HIPS-a postaje veća što zadatak zahtijeva dublju numeričku obradu. Nadalje, jačina aktivacije HIPS-a obrnuto je

proporcionalna numeričkoj udaljenosti među brojevima u zadacima usporedbe brojeva po veličini. Drugim riječima, aktivnost je ovog područja veća kada su brojevi bliži kao kod usporedbe 5 i 6 nasuprot 5 i 9 (Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan i Dehaene, 2004).

### *Neurofiziološka istraživanja*

Mjerenjem električne aktivnosti pojedinačnih neurona u mozgu primata otkriveni su neuroni osjetljivi za brojeve u lateralnom prefrontalnom korteksu (Nieder, Freedman i Miller, 2002; Nieder i Miller, 2003) i intraparijetalnom sulku (Nieder i Miller, 2004). U zadatku se odgođenog uparivanja s uzorkom od majmuna traži da gleda dvije slike koje mu se prezentiraju jedna iza druge s malom vremenskom odgodom te da odredi jesu li dvije slike iste ili različite, pri čemu je jedino bitno svojstvo po kojem se slike razlikuju broj objekata na njima, koji je varirao od jedan do pet. Osnovno je obilježje otkrivenih neurona koji su nazvani i numeroni da imaju određeni preferirani broj na koji maksimalno reagiraju. Tako imamo neurone osjetljive za jedan, dva, tri, četiri ili pet objekata u vidnom polju. Nadalje, neuron čiji je preferirani broj primjerice tri pokazuje određenu aktivaciju i kada su prezentirana dva ili četiri objekta na slici. Drugim riječima, ovi neuroni imaju karakteristične krivulje podešenosti, slično kao i drugi neuroni u vidnom sustavu, koje se mogu opisati Gaussovom funkcijom. Krivulje podešenosti upućuju na to da kardinalitet skupa nije kodiran precizno, već da uvijek postoji određena razina neuronskog šuma zbog kojeg može doći do konfuzije prilikom reprezentacije sličnih veličina. Na taj bi se način mogao objasniti efekt numeričke udaljenosti i veličine dobiven u kognitivnim eksperimentima. U skladu s tim, otkriveno je da kada majmun napravi grešku u odgovaranju, aktivnost je neurona osjetljivog za odgovarajući broj manja nego kada majmun da točan odgovor. Iz toga proizlazi da bi numeroni mogli činiti neuralnu osnovu mentalne numeričke linije (Nieder, 2005; Nieder i Dehaene, 2009).

### *Opća reprezentacija veličina*

Iako mnogobrojna istraživanja upućuju na povezanost prostora i brojeva, ostaje nejasno postoji li posebna prostorna reprezentacija u parijetalnom korteksu specijalizirana za brojeve. Prema teoriji o veličinama parijetalni korteks sadrži opću reprezentaciju veličina koju dijele percepcija prostora, vremena, svjetlina, brzina i brojeva, odnosno percepcija svih analognih ili kvantitativnih dimenzija (Walsh, 2003). Dakle, brojevi nemaju neki poseban status, nego su dio šire neuronske mreže zadužene za stvaranje reprezentacije okoline koja će omogućiti kretanje u prostoru. Predikcije su koje proizlaze iz ove teorije da bi trebale postojati interakcije među analognim dimenzijama, a dio je predikcija i potvrđen (Buetti i Walsh, 2009). Jedna je potvrda za ovu teoriju postojanje numeričkog Stroopova efekta ili efekta kongruentnosti veličina (Henik i Tzelgov, 1982). Kada ispitanici moraju što brže

odrediti koji je od dva istovremeno prikazana broja numerički veći, njihov odgovor će biti brži u situaciji

2      9  
nego u situaciji  
2      9.

Dakle, fizička veličina podražaja stvara Stroopovu interferenciju s usporedbom numeričke veličine. Efekt se javlja i u obrnutom smjeru kada ispitanici uspoređuju brojeve po fizičkoj veličini, a zanemaruju numeričku veličinu. Povezanost reprezentacije fizičke veličine i brojeva potvrđena je i funkcionalnim oslikavanjem mozga (Pinel, Piazza, LeBihan i Dehaene, 2004). Također, u ventralnom intraparijetalnom režnju (VIP) primata otkriveni su neuroni koji pokazuju zajedničku osjetljivost za brojnost objekata i veličinu linija (Tuduscic i Nieder, 2007).

Pored interakcije između numeričke i fizičke veličine istraživači su otkrili i interakciju između brojeva i svjetline. Cohen Kadosh i Henik (2006) koristili su zadatak usporedbe brojeva po veličini i dobili su da ispitanici brže reagiraju na male brojeve kada su prikazani u bijeloj nego u crnoj boji. S druge strane, kod velikih je brojeva reakcija bila brža u crnoj nego u bijeloj boji. Ovo upućuje na postojanje zajedničke reprezentacije veličina za brojeve i svjetline pri čemu se svjetline preslikavaju na način da su svjetlije nijanse povezane s manjom veličinom. Zanimljivo je da i mala djeca povezuju male veličine s bijelom bojom, a velike s crnom (Smith i Sera, 1992). Asocijacija malo-bijelo i veliko-crno prisutna je i kod osoba koje imaju sinesteziju tipa boja-brojka (Cohen Kadosh, Henik i Walsh, 2007). Međutim, u drugom je kronometrijskom istraživanju dobiven obrnut rezultat, odnosno reakcija je na male brojeve bila brža u crnoj nego u bijeloj boji, a za velike je brojeve bila brža u bijeloj nego u crnoj boji što upućuje na obrnutu orijentaciju skale svjetlina (Cohen Kadosh, Cohen Kadosh i Henik, 2008). Nedavno su Fumarola i sur. (2014) pokazali da ispitanici brže reagiraju lijevom rukom na tamnije nijanse sive boje, a desnom rukom na svjetlije. Isti su efekt dobili i u direktnom (usporedba svjetlina) i u indirektnom zadatku (usporedba boja) što upućuje na preslikavanje malo-crno i veliko-bijelo, koje je dobiveno istom paradigmatom kao i kod SNARC efekta.

Iako postoje brojni dokazi za povezanost među različitim kvantitativnim dimenzijama, Bonn i Cantlon (2012) zaključuju kako idalje ostaje neriješeno pitanje na kojoj razini obrade nastaju ove veze. Moguće je da su veze posljedica preslikavanja na zajedničku reprezentaciju veličina, kao što to predlaže Walsh (2003; Buetti i Walsh, 2009), ali isto tako postoje i drugi putevi kao što je metaforičko ili konceptualno preslikavanje, a neke veze mogu biti i jednostavno naučene.

## Sustav za automatsko prebrojavanje

Ljudi su sposobni brzo, točno i s velikom sigurnošću odrediti kardinalitet malog skupa objekata (do 4). Ovaj je proces nazvan subitizacija (po latinskoj riječi *subitus* što znači brzo ili neposredno), a otkriven je prije više od sto godina kada je Jevons (1871) ispitivao svoju sposobnost procjene koliko komada graha ima u kutiji. Kasnija su istraživanja potvrdila i proširila Jevonsov nalaz (Kaufman, Lord, Reese i Volkman, 1949; Mandler i Shebo, 1982). Kada se grafički prikaže odnos brzine prebrojavanja u funkciji broja objekata u vidnom polju, dolazi do karakterističnog prekida na krivulji kod broja 4. Za skupove do 4 objekta krivulja ima blagi rast od 40 do 100 ms po objektu, dok za veće skupove funkcija ima mnogo strmiji rast od 250 do 350 ms po objektu. Sličan se oblik krivulje javlja i kod broja grešaka, kao i kod procjene sigurnosti u odgovor. Zanimljivo je da postoje i velike individualne razlike u sposobnosti subitizacije jer neki ljudi pokazuju prekid krivulje već kod broja 2, dok drugi ljudi mogu subitizirati i veće skupove objekata od čak 6 objekata (Trick i Pylyshyn, 1994). Zanimljivo je da subitizacija nije ograničena samo na vidni modalitet. U novije je vrijeme otkriveno da je moguće subitizirati auditorne (Camos i Tillmann, 2008; Repp, 2007) i taktilne podražaje (Plaisier, Bergmann Tiest i Kappers, 2009).

Važno je pitanje oslanja li se subitizacija na istu reprezentaciju brojeva na kojoj počiva približna procjena brojnosti ili zahtijeva zasebnu reprezentaciju. Karakteristike krivulje brzine prebrojavanja upućuju na to da subitizacija počiva na brzom, paralelnom procesu koji ne zahtijeva napor, dok prebrojavanje većih skupova zahtijeva sporo i naporno premještanje pažnje s jednog objekta na drugi. S druge strane, Dehaene i Changeux (1993) su pretpostavili da procjena brojnosti i za male i za velike skupove ovisi o istom mehanizmu, odnosno o procjeni brojnosti. U tom je slučaju potrebno objasniti zašto dolazi do prekida na krivulji brzine prebrojavanja. Prema ovim autorima točnost procjene brojnosti i za male i za velike skupove slijedi Weberov zakon. Međutim, neuralni je šum ili skalarni varijabilitet za male skupove toliko mali da se ne može detektirati u vremenu reakcije i točnosti. Drugim riječima, mali skupovi ne zahtijevaju nikakav poseban mehanizam nego je kod njih percipirani pomak od jedne veličine do druge dovoljno velik da ga sustav za procjenu brojnosti s lakoćom razlikuje. Ovaj zaključak potkrepljuju neurofiziološka mjerenja neurona u mozgu majmuna koja pokazuju da nema prekida između reprezentacije velikih i malih brojeva (Nieder, 2005; Nieder i sur., 2002), kao i istraživanje funkcionalnim oslikavanjem mozga koje je pokazalo da nema razlike u aktivaciji mozga prilikom procjene malih i velikih brojnosti odnosno ne postoji poseban dio mozga koji se aktivira samo prilikom procjene malih brojnosti (Piazza, Mechelli, Butterworth i Prince, 2002).

Međutim, novija istraživanja ipak upućuju na poseban status subitizacije. Revkin, Piazza, Izard, Cohen i Dehaene (2008) su pokazali da je identifikacija brojnosti u rasponu od 1 do 4 objekata mnogo preciznija nego u rasponu od 10 do 40

objekata, iako bi prema Weberovu zakonu razlikovanje jednog od dva objekta trebalo biti jednako precizno kao i razlikovanje između 10 i 20 objekata jer je Weberov omjer u oba slučaja jednak. Nadalje, individualne razlike u kapacitetu za subitizaciju ne koreliraju s preciznošću procjene brojnosti, odnosno s individualnim razlikama u Weberovu omjeru. Također, usmjeravanje pažnje na drugi zadatak utječe na subitizaciju, ali ne i na procjenu brojnosti (Burr, Turi i Anobile, 2010), kao što i opterećivanje vidnog radnog pamćenja otežava subitizaciju, ali ne i procjenu brojnosti (Piazza, Fumarola, Chinello i Melcher, 2011).

Novija su neuroznanstvena istraživanja uspjela izolirati zaseban kortikalni centar specijaliziran za male brojeve. Funkcionalnim su oslikavanjem mozga tehnikom fMRI-a Ansari, Lyons, van Eimeren i Xu (2007) pokazali da kada ispitanici rješavaju zadatak usporedbe brojeva po veličini, dolazi do pojačane aktivacije desne temporo-parijetalne spojnice (engl. *temporo-parietal junction* – TPJ) kada se uspoređuju mali brojevi. S druge strane, kada se uspoređuju veliki brojevi po veličini, dolazi do smanjenja aktivacije TPJ-a i pojačane aktivacije IPS-a, za koji se smatra da predstavlja neuronsku osnovu osjeta za brojeve. Slična je razlika u aktivaciji TPJ-a i IPS-a dobivena i kod prebrojavanja malih i velikih skupova objekata (Vetter, Butterworth i Bahrami, 2011). Mjerenjem elektromagnetskih valova izazvanih događajem (engl. *event related potentials* – ERP), Hyde i Spelke (2009) su pokazali da sekvencijalna prezentacija dva mala skupa (od jednog do tri objekta) izaziva rani signal (N1) na posteriornim parijetalnim elektrodama. Pri tome, jačina signala varira samo s veličinom drugog skupa bez utjecaja veličine prvog skupa. S druge strane, veći skupovi objekata izazivaju kasniji signal (P2p) na posteriornim parijetalnim elektrodama pri čemu jačina signala varira ovisno o Weberovu omjeru između brojnosti dva skupa. Sličan se efekt javlja i kod predverbalne djece (Hyde i Spelke, 2011).

Trick i Pylyshyn (1994) su predložili model prema kojem subitizacija proizlazi iz generalnog mehanizma individuacije ili označavanja (indeksiranja) objekata u vidnom polju. Pod individuacijom se podrazumijeva proces kojim se objekti počinju percipirati kao specifične jedinice koje imaju svoj identitet i prostorni položaj. Pomoću indeksiranja vidni sustav određuje na koje će se objekte usmjeriti pažnja, odnosno koji će objekti dobiti prioritet prilikom detaljne vidne obrade. Indeksiranje predstavlja sučelje između brzih, paralelnih procesa ranog vida i sporih, serijskih kognitivnih procesa kao što su zaključivanje i rezoniranje (Pylyshyn, 2011). Kapacitet indeksiranja ograničen je na 4 do 5 objekata, što odgovara rasponu subitizacije te kapacitetu vidnoga radnog pamćenja (Luck i Vogel, 1997). Važnost se radnog pamćenja za subitizaciju vidi iz činjenice da postoji pozitivna korelacija između kapaciteta za subitizaciju i kapaciteta radnog pamćenja, ali ne postoji korelacija između procjene brojnosti i kapaciteta radnog pamćenja (Piazza i sur., 2011).

Opisana istraživanja jasno pokazuju da je sustav za subitizaciju odvojen od sustava za procjenu brojnosti i da aktivira drugačije kognitivne i neuronske

mehanizme. Međutim, ostaje nejasno aktiviraju li se prilikom prezentacije malog skupa objekata oba sustava zajedno ili postoji podjela poslova. Cordes i Brannon (2009) su predložile dva moguća objašnjenja. Prema prvoj se hipotezi sustav za subitizaciju aktivira samo za male skupove, a sustav za brojnost samo za velike skupove. Ipak, u kasnijem se koraku rezultat subitizacije preslikava na sustav za brojnost, odnosno reprezentacija vidnih indeksa pretvara se u približnu veličinu. Druga hipoteza kaže da se oba sustava aktiviraju paralelno, ali u nekim situacijama sustav za subitizaciju preuzima kontrolu nad izvođenjem zadatka jer je nepreciznost u sustavu za brojnost prevelika. Hyde (2011) je predložio model prema kojem se sustav za subitizaciju aktivira onda kada postoje uvjeti za individuaciju, odnosno za tretiranje svakog objekta kao zasebnu mentalnu jedinicu dok se sustav za procjenu brojnosti aktivira samo u situaciji koja sprečava individuaciju i potiče tretiranje podražaja kao skupa.

### Interakcije među sustavima

Prema Dehaeneu (2009) matematička se intuicija oslanja na osjet za brojeve, odnosno na sustav za približnu procjenu brojnosti. Prema hipotezi o kulturalnom recikliranju neuronskih krugova noviji kortikalni krugovi, koji se razvijaju pod utjecajem kulture i učenja, preuzimaju dio neuralnih resursa od starijih krugova (Dehaene i Cohen, 2007). Stoga, mora postojati veza između sustava za egzaktno brojeve i sustava za percepciju brojnosti. Potvrda je za ovu pretpostavku postojanje efekta veličine i efekta udaljenosti kod egzaktnih brojeva. Nadalje, funkcionalnim je oslikavanjem mozga kod ljudi utvrđeno da postoji preklapanje neuronske aktivacije prilikom rješavanja zadataka procjene brojnosti i kod zadataka usporedbe egzaktnih brojeva (Piazza, Pinel, Le Bihan i Dehaene, 2007).

Iako se navedeni rezultati čine razumljivi, postoje i istraživanja koja dovode u pitanje postojanje veze između egzaktnih brojeva i percepcije brojnosti. Koechlin, Naccache, Block i Dehaene (1999) su istraživali pripremu ponavljanjem (engl. *repetition priming*) pri čemu su ispitanicima prezentirali brojke ili skupove točkica. U situaciji kada je pripremajući podražaj bio istog formata kao i ciljni podražaj dolazilo je do efekta pripreme, odnosno do ubrzanja vremena reakcije na ciljni podražaj. Međutim, kada se format pripremajućeg podražaja i ciljnog podražaja razlikovao, nije dolazio do efekta pripreme. Isti je rezultat dobiven i kod svjesne i kod nesvjesne pripreme, odnosno i u situaciji kada je pripremajući podražaj prezentiran tako kratko da ga ispitanik ne može svjesno zamijetiti, kao i u situaciji kada je podražaj prezentiran dovoljno dugo da ga ispitanik može zamijetiti.

Nedavno su Lyons, Ansari i Beilock (2012) mjerili brzinu usporedbe brojeva po veličini u dva uvjeta: 1) kada je jedan broj prikazan brojkom, a drugi kao skup točkica i 2) kada su oba broja prikazana kao skupovi točkica. Dobili su da je usporedba između dva različita formata značajno sporija nego kada se uspoređivalo

veličine unutar istog formata. Nadalje, utvrdili su da ovaj efekt ne ovisi o veličini ili udaljenosti veličina koje se uspoređuju. Na osnovu toga zaključili su da su brojeve kao simboli "otuđene" od veličina koje predstavljaju. U skladu je s tim Cohen (2009) pokazao da efekt numeričke udaljenosti kod usporedbe dva broja proizlazi iz perceptivne sličnosti brojki, a ne iz njihova semantičkog značenja, odnosno numeričke veličine. On je upotrijebio simbole za brojeve koji se sastoje od jednostavnih linija, kao na starim digitalnim satovima, kako bi precizno izmjerio perceptivnu sličnost i pokazao je da postoji veća sličnost između brojeva 4 i 5 nego 1 i 5. Do istog su zaključka došli i Garcia-Orza, Perea, Abu Mallouth i Carreiras (2012), koji su pokazali da je perceptivna sličnost bolji prediktor vremena reakcije u zadatku usporedbe brojeva i kod Europljana, koji se koriste arapskim brojkama, kao i kod Pakistanaca i Jordanaca, koji se koriste perzijskim simbolima za brojeve. Na kraju, 11-mjesečna je longitudinalna studija s djecom u dobi od 6 godina pokazala da mjere preciznosti sustava za brojnost ne daju značajan doprinos objašnjenju individualnih razlika u aritmetičkim vještinama povrh mjera znanja o egzaktnim brojevima (Göbel, Watson, Lervag i Hulme, 2014). Autori zaključuju da sustav za brojnost nije presudan za razvoj aritmetičkih vještina, već su to verbalni procesi povezani s učenjem oznaka za brojeve.

Mogući je razlog zašto egzaktni brojevi i percepcija brojnosti nisu povezani nepreciznost mentalne numeričke linije. Neurofiziološka istraživanja sugeriraju da će se u situaciji kada vidimo primjerice 26 točkica aktivirati neuron koji je osjetljiv za broj 26, ali isto tako snažno će se aktivirati i neuroni koji su osjetljivi za brojeve 22, 23, 24, 27, 28 i 29. Zbog toga se neuralnog šuma ne može uspostaviti jednoznačno preslikavanje između mentalne numeričke linije i reprezentacije brojevnih simbola, što je preduvjet za shvaćanje egzaktnog broja. U skladu s tim, Izard i Dehaene (2008) su pokazali da je sposobnost preciznog određivanja skupova točkica vrlo slaba. Pri tome su dobili da ispitanici sustavno podcjenjuju brojnost točkica. S druge strane, sustav za subitizaciju, iako neverbalan, omogućuje reprezentaciju egzaktnog broja. Međutim, veza između egzaktnih brojeva i sustava za subitizaciju nije dosad sustavno istražena kronometrijskom metodom.

## **Zaključak**

Opisana su tri sustava za reprezentaciju značenja prirodnih brojeva. Sustav se za egzaktne brojeve temelji na usvajanju i razumijevanju kompleksnih pojmova kao što su egzaktna jednakost i funkcija nasljednik. Međutim, ostaje otvoreno pitanje u kojoj se mjeri sustav za egzaktne brojeve oslanja i na druga dva sustava, tj. na osjet za brojeve i na sustav subitizaciju prilikom rješavanja jednostavnih zadataka kao što je uspoređivanje brojeva po veličini ili određivanje pariteta broja. Postojanje efekata kao što su efekt veličine i udaljenosti te SNARC efekt upućuju na to da se značenje broja, odnosno njegova veličina preslikava na mentalnu numeričku liniju koja predstavlja približnu procjenu (ili percepciju) brojnosti objekata u vidnom polju. S

druge strane, novija istraživanja upućuju na mogućnost da je sustav za egzaktne brojeve potpuno neovisan od osjeta za brojeve. Buduća će istraživanja morati preciznije utvrditi u kojim se uvjetima veza između sustava javlja i zašto se u nekim situacijama ne javlja.

Osim kronometrijskim studijama na odraslim ljudima ovaj se problem može ispitivati i iz drugih aspekata. Na primjer, zanimljivo je pitanje u kojoj mjeri osjet za brojeve i subitizacija pridonose razvoju pojma egzaktnog broja kod djece. Nažalost, u razvojnoj kognitivnoj psihologiji nema jedinstvenog gledišta o ulozi ovih sustava. Prema Carey (2004) je subitizacija ključni mehanizam za razvoj pojma egzaktnog broja jer djeca povezuju riječi za brojeve s vidnim indeksima. S druge strane, Piazza (2010) smatra da je subitizacija manje važan sustav od osjeta za brojeve. Na kraju, Leslie, Gelman i Gallister (2007) i Butterworth (2010) zagovaraju tezu da ni subitizacija ni osjet za brojeve ne mogu biti kognitivna osnova za razvoj pojma egzaktnog broja, već smatraju da je taj pojam urođen i potpuno neovisan od ostalih sustava. Štoviše, Gelman i Butterworth (2005) smatraju da je sustav za egzaktne brojeve neovisan i od jezika. Stoga će biti potrebna velika kreativnost u smišljanju novih zadataka i novih metoda istraživanja kako bi se odgovorilo na ovo ključno pitanje numeričke spoznaje.

## Literatura

- Ansari, D., Lyons, I.M., van Eimeren, L. i Xu, F. (2007). Linking visual attention and number processing in the brain: The role of the temporo-parietal junction in small and large symbolic and nonsymbolic number comparison. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19, 1845-1853.
- Bonn, C. i Cantlon, J.F. (2012). The origins and structure of quantitative concepts. *Cognitive Neuropsychology*, 29, 149-173.
- Buetti, D. i Walsh, V. (2009). The parietal cortex and the representation of time, space, number, and other magnitudes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 364, 1831-1840.
- Burr, D.C., Turi, M. i Anobile, G. (2010). Subitizing but not estimation of numerosity requires attentional resources. *Journal of Vision*, 6(10), 20.
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 534-541.
- Calabria, M. i Rossetti, Y. (2005). Interference between number processing and line bisection: A methodology. *Neuropsychologia*, 43, 779-783.
- Camos, V. i Tillmann, B. (2008). Discontinuity in the enumeration of sequentially presented auditory and visual stimuli. *Cognition*, 107, 1135-1143.
- Carey, S. (2004). Bootstrapping and the origins of concepts. *Daedalus*, 133, 59-68.

- Cohen, D.J. (2009). Integers do not automatically activate their quantity representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 16, 332-336.
- Cohen Kadosh, R., Cohen Kadosh, K. i Henik, A. (2008). When brightness counts: The neuronal correlate of numerical-luminance interference. *Cerebral Cortex*, 18, 337-343.
- Cohen Kadosh, R. i Henik, A. (2006). A common representation for semantic and physical properties: A cognitive-anatomical approach. *Experimental Psychology*, 53, 87-94.
- Cohen Kadosh, R., Henik, A. i Walsh, V. (2007). Small is bright and big is dark in synaesthesia. *Current Biology*, 17, 834-835.
- Cooper, R.G. (1984). Early number development: Discovering number space with addition and subtraction. U: C. Sophian (Ur.), *The origins of cognitive skills* (str. 157-192). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cordes, S. i Brannon, E.M. (2009). Crossing the divide: Infants discriminate small from large numerosities. *Developmental Psychology*, 45, 1583-1594.
- Dantzig, T. (1967). *Number: The language of science*. New York: Free Press.
- Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind and Language*, 16, 16-36.
- Dehaene, S. (2003). The neural basis of Weber-Fechner's law: Neuronal recordings reveal a logarithmic scale for number. *Trends in Cognitive Science*, 7, 145-147.
- Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions: The case of arithmetic. *Annals of the New York Academy of Science*, 1156, 232-259.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense. 2nd ed.* New York: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Bossini, S. i Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371-396.
- Dehaene, S. i Changeux, J.P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neural model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5, 390-407.
- Dehaene, S. i Cohen, L. (2007). Cultural recycling of cortical maps. *Neuron*, 56, 384-398.
- Dehaene, S., Dupoux, E. i Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance*, 16, 626-641.
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. i Wilson, A.J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14, 218-224.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. i Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- Duncan, G.J., Dowsett, C.J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A.C., Klebanov, P., Pagani, L.S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K. i Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43, 1428-1446.
- Feigenson, L., Dehaene S. i Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307-314.

- Fischer, M.H. (2001). Number processing induces spatial performance biases. *Neurology*, 57, 822-826.
- Fischer, M.H., Castel, A.D., Dodd, M.D. i Pratt, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature Neuroscience*, 6, 555-556.
- Fumarola, A., Prpic, V., Da Pos, O., Murgia, M., Umilta, C. i Agostini, T. (2014). Automatic spatial association for luminance. *Attention, Perception & Psychophysics*, 76, 759-765.
- Gallistel, C.R. i Gelman, R. (2005). Mathematical cognition. U: K. Holyoak i R. Morrison (Ur.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (str. 559-588). New York: Cambridge University Press.
- García-Orza, J., Perea, M., Abu Mallouh, R. i Carreiras, M. (2012). Physical similarity (and not quantity representation) drives perceptual comparison of numbers: Evidence from two Indian notations. *Psychonomic Bulletin and Review*, 19, 294-300.
- Gelman, R. i Butterworth, B. (2005). Number and language: How are they related? *Trends in Cognitive Sciences*, 9, 6-10.
- Goswami, U. (2008). *Cognitive development*. Hove, UK: Psychology Press.
- Göbel, S.M., Watson, S.E., Lervag, A. i Hulme, C. (2014). Children's arithmetic development: It is number knowledge, not the approximate number sense, that counts. *Psychological Science*, 25, 789-798.
- Henik, A. i Tzelgov, J. (1982). Is three greater than five: The relation between physical and semantic size in comparison tasks. *Memory & Cognition*, 10, 389-395.
- Huntley-Fenner, G. (2001). Children's understanding of number is similar to adults' and rats': Numerical estimation by 5- to 7-year-olds. *Cognition*, 78, B27-B40.
- Huntley-Fenner, G. i Cannon, E. (2000). Preschoolers' magnitude comparisons are mediated by a preverbal analog mechanism. *Psychological Science*, 11, 147-152.
- Hyde, D.C. (2011). Two systems of non-symbolic numerical cognition. *Frontiers in Human Neuroscience*, 5, 150.
- Hyde, D.C. i Spelke, E.S. (2009). All numbers are not equal: An electrophysiological investigation of small and large number representations. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 21, 1039-1053.
- Hyde, D.C. i Spelke, E.S. (2011). Neural signatures of number processing in human infants: Evidence for two core systems underlying numerical cognition. *Developmental Science*, 14, 360-371.
- Izard, V. i Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition*, 106, 1221-1247.
- Izard, P., Pica, P., Spelke, E. i Dehaene, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical Psychology*, 21, 491-505.
- Jevons, W.S. (1871). The power of numerical discrimination. *Nature*, 3, 363-372.

- Kaufman, E.L., Lord, M.W., Reese, T. i Volkman, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62, 496-525.
- Koechlin, E., Naccache, L., Block, E. i Dehaene, S. (1999). Primed numbers: Exploring the modularity of numerical representations with masked and unmasked priming. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 25, 1882-1905.
- Leslie, A.M., Gelman, R. i Gallistel, C.R. (2007). Where integers come from. U: P. Carruthers, S. Laurence i S. Stich (Ur.), *The innate mind, Vol. 3: Foundations and the future* (str. 109-138). New York: Oxford University Press.
- Luck, S.J. i Vogel, E.K. (1997). The capacity of visual working memory for features and conjunctions. *Nature*, 390, 279-281.
- Lyons, I.M., Ansari, D. i Beilock, S.L. (2012) Symbolic estrangement: Evidence against a strong association between numerical symbols and the quantities they represent. *Journal of Experimental Psychology: General*, 141, 635-641.
- Mandler, G. i Shebo, B.J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, 111, 1-22.
- Moyer, R.S. i Landauer, T.K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519-1520.
- Nieder, A. (2005). Counting on neurons: The neurobiology of numerical competence. *Nature Reviews Neuroscience*, 6, 177-190.
- Nieder, A. i Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185-208.
- Nieder, A., Freedman, D.J. i Miller, E.K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, 297, 1708-1711.
- Nieder, A. i Miller, E.K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, 37, 149-157.
- Nieder, A. i Miller E.K. (2004). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101, 7457-7462.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (2010). *The high cost of low education performance: The long-run economic impact of improving PISA outcomes*. Paris: OECD.
- Parkman, J.M. (1971). Temporal aspects of digit and letter inequality judgments. *Journal of Experimental Psychology*, 91, 191-205.
- Parsons, S. i Bynner, J. (2005). *Does numeracy matter more?* London: National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy.
- Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 542-551.
- Piazza, M., Fumarola, A., Chinello, A. i Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, 121, 147-153.

- Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D. i Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, 44, 547-555.
- Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B. i Price, C.J. (2002). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *Neuroimage*, 15, 435-446.
- Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D. i Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex. *Neuron*, 53, 293-305.
- Pinel, P., Piazza, M., LeBihan, D. i Dehaene, S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representations of number size and luminance during comparative judgments. *Neuron*, 41, 983-993.
- Plaisier, M.A., Bergmann Tiest, W.M. i Kappers, A.M. (2009). One, two, three, many: Subitizing in active touch. *Acta Psychologica*, 131, 163-170.
- Pylyshyn, Z.W. (2011). *Things and places: How the mind connects with the world*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Repp, B.H. (2007). Perceiving the numerosity of rapidly occurring auditory events in metrical and nonmetrical contexts. *Perception & Psychophysics*, 69, 529-543.
- Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, 95, 437-444.
- Revkin, S.K., Piazza, M., Izard, V., Cohen, L. i Dehaene, S. (2008). Does subitizing reflect numerical estimation? *Psychological Science*, 19, 607-614.
- Rumbaugh, D.M., Savage-Rumbaugh, S. i Hegel, M.T. (1987). Summation in the chimpanzee (Pan troglodytes). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 13, 107-115.
- Smith, L.B. i Sera, M. (1992). A developmental analysis of the polar structure of dimensions. *Cognitive Psychology*, 24, 99-142.
- Trick, L.M. i Pylyshyn, Z.W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, 101, 80-102.
- Tudusciuc, O. i Nieder, A. (2007). Neuronal population coding of continuous and discrete quantity in the primate posterior parietal cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104, 14513-14518.
- Vetter, P., Butterworth, B. i Bahrami, B. (2011). A candidate for the attentional bottleneck: Set-size specific modulation of right TPJ during attentive enumeration. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 23, 728-736.
- Vuilleumier, P., Ortigue, S. i Brugger, P. (2004). The number space and neglect. *Cortex*, 40, 399-410.
- Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: Common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 483-488.

- Wiese, H. (2003a). Iconic and non-iconic stages in number development: The role of language. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 385-390.
- Wiese, H. (2003b). *Numbers, language, and the human mind*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Xu, F. (2003). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two system of representations. *Cognition*, 89, 15-25.
- Xu, F. i Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74, 1-11.
- Xu, F., Spelke, E.S. i Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8, 88-101.
- Zorzi, M., Priftis, K. i Umiltà, C. (2002). Brain damage: Neglect disrupts the mental number line. *Nature*, 417, 138-139.

## **Cognitive and Neural Bases for Understanding Natural Numbers**

### **Abstract**

This work reviewed recent empirical data on the existence of three distinct cognitive and neural systems behind our ability to understand natural numbers. The first system, specific to adult humans only, enables understanding of exact numbers and their flexible application in cardinal, ordinal and nominal number assignments. The second system is present in preverbal infants and in other species. It represents number magnitudes via spatial representation known as a mental number line. Chronometric studies have revealed several phenomena such as the numerical distance and size effects, and the SNARC effect, which point to the conclusion that the meaning of exact numbers is mapped into an evolutionary older system for approximate numerosity, also known as a number sense. The third system enables fast and accurate enumeration or subitisation of small sets of objects. This system is closely related to attention and working memory because it depends on visual indexing or object individuation. It is also present in preverbal infants, as well as in some animal species. Neuroscience research showed that there are partially distinct neuronal circuits for representation of exact numbers, approximate numerosity and enumeration of small sets. At the end of the study, a research on the possible interactions between these three systems was reviewed because it is still an open question to what degree the understanding of the concept of exact number relies on the system for approximate numerosity or the system for fast enumeration.

**Keywords:** numbers, mental number line, number sense, subitisation

## **Bases cognitivas y neuronales para comprender los números naturales**

### **Resumen**

En el trabajo se exponen las nociones contemporáneas sobre los sistemas cognitivos y neuronales que están en la base de la comprensión de los números naturales. El primer sistema, característico sólo para los humanos, posibilita la comprensión de los números exactos y su aplicación flexible en la marcación cardinal, ordinal y nominal. A través de las investigaciones cronométricas se han descubierto varios fenómenos, como efecto de tamaño, efecto de distancia y efecto SNARC, que indican que el significado del número exacto se basa en el sistema evolutivo más antiguo para la evaluación aproximada de numerosidad. Este sistema está presente en los niños preverbales y otras especies, y representa la numerosidad a través de la recta numérica. El tercer sistema asegura la enumeración automática y exacta de conjuntos pequeños. Este sistema está relacionado con la atención y memoria de trabajo, es decir, con indexar o individualizar los objetos, y también es presente en los niños preverbales y otras especies. Las investigaciones neurocientíficas muestran que existen circuitos neuronales separados para representar los números exactos, valor aproximativo y conjuntos pequeños. Al final se han descrito las investigaciones sobre posibles interacciones entre los sistemas ya que sigue sin resolver la cuestión de medida en la que la comprensión del término de número exacto depende del sistema de evaluación de numerosidad y del sistema de conteo rápido.

**Palabras claves:** números, recta numérica mental, sentido numérico, subitización

Primljeno: 11.02.2016.